

基于无网格方法的钢结构构件优化模拟分析

赵群^{1,2}

(1. 广东博意建筑设计院有限公司, 广东 佛山 528312;

2. 西安交通大学工程力学系, 陕西 西安 710049)

摘要:对基于无网格方法的钢结构构件进行了拓扑优化设计模拟分析的研究. 以钢构件虚密度作为设计变量, 引入势阱函数, 构造以钢结构构件的柔度和势阱函数作为优化的目标函数. 同时显式表达虚密度与材料弹性模量之间的对应关系, 并通过引入势阱函数, 使中间密度值向 0/1 两端聚集. 在无网格法框架下进行了灵敏度分析, 采用了序列二次规划法(SQP)作为优化算法进行了优化, 验证了无网格法框架下进行钢结构构件优化模拟分析的可行性.

关键词:无网格方法; 势阱函数; 钢结构构件拓扑优化; 灵敏度分析

中图分类号: TU318

文献标识码: A

0 引言

钢结构构件拓扑优化的目的是要寻求钢结构的某种布局, 使其能够在满足一切有关应力、位移等约束条件的情况下将外荷载传递到支座, 并让某种性能达到最优^[1]. 由于拓扑优化能够带来更大的优化效益, 目前已成为结构优化领域内的一个热点. 结构拓扑优化设计是继结构的尺寸优化设计和形状优化设计以后, 在结构优化领域出现的一种富有挑战性的研究方向. 在结构优化设计中, 有限元方法(FEM)是一种应用最为广泛的结构分析模拟技术. 然而, 由于FEM本身的特点, 使它在结构优化设计中的应用仍然面临着一些困难与挑战, 如: 计算获得的应力场是不光滑的; 在基于FEM的结构优化设计过程中不可避免的需要大量的网格重新划分工作等容易导致整个优化过程的不稳定^[2]. 作为一种不依赖网格的数值方法, 无网格方法在结构优化设计中的应用研究受到了越来越广泛的关注. 无网格方法采用的是完全不同于有限元方法的形状函数生成技术, 它仅仅采用基于点的近似, 而不需要节点的连接信息, 避免了烦琐的单元网格生成^[3]. 本文对基于无网格再生核质点法的钢结构构件拓扑优化进行了研究探索, 并通过几个算例证明了在无网格再生核质点法框架下进行钢结构构件拓扑优化设计分析是可行的.

1 钢结构构件拓扑优化的数学模型

在进行钢结构构件拓扑优化设计时, 其初始设计区域本文采用基结构法进行描述. 所谓基结构法, 就是把给定的初始设计区域离散成适当的, 足够多得设计区域, 形成由若干子设计区域构成的基结构, 然后再按某种方法和规则从这个基结构中删除某些单元, 用保留下来的单元描述结构的最优拓扑^[4]. 对于刚性设计问题, 首先利用基结构法确定设计区域及设计变量 $E_{ijkl}(x)$ 对于指定设计区域 Ω , 弹性体的内力虚功为:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl}(x) \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{kl}(v) d\Omega$$

其中, u 表示位移, v 表示虚位移, 线应变为:

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

载荷的线性形式(外力势能):

$$l(u) = \int_{\Omega} f u d\Omega + \int_{\Gamma} t u ds$$

f 为体力, t 为边界 Γ 的力向量.

由虚功原理可知, 对任意弹性体有:

$$a(u, v) = l(u)$$

研究认为变形能最小结构就是拓扑最优结构. 所以这里选取钢结构构件的变形能最小也就是柔度最小作为目标函数, 这钢结构构件拓扑优化的数学模型表达式为:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U(E)} l(u) \\ & \text{s. t. } a(u, v) = l(v) \end{aligned}$$

$$v \in U,$$

$$E \in E_{ad}$$

其中 U 为可能的位移场空间, E 为设计变量, E_{ad} 为弹性模量的集合.

在钢结构构件拓扑优化中, 对参数 E 的不同定义导致不同的拓扑优化设计方法. 钢结构构件拓扑优化方法中最常用的是均匀化方法 (Homogenization Method) 和密度法 (Density Method)^[5]. 它们都是以材料弹性张量作为描述钢结构形式的优化设计方法. 本文将采用密度法来进行连续体结构的拓扑优化设计.

钢结构构件的拓扑优化设计依据本文采用的方法可以得到如下数学模型:

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= \chi(x) E_{ijkl}^0, \\ \chi(x) &= \begin{cases} 1 & x \in \Omega^{mat} \\ 0 & x \in \Omega/\Omega^{mat} \end{cases} \quad (1) \\ \int_{\Omega} \chi(x) d\Omega &= \text{Vol}(\Omega^{mat}) \leq V \end{aligned}$$

这里 E_{ijkl}^0 是所选钢材的弹性模量, 区域 Ω^{mat} 表示的是材料区, V 为设计区域 Ω 所占的体积, 不等式表示对材料用量的一个约束. 这是一个典型的离散变量优化问题, 由于数学模型中目标函数与约束函数的不连续性, 使得优化问题成为不可微的优化模型. 常用于连续变量的优化算法很难应用. 为了克服离散变量优化模型的求解困难, 常将离散变量的优化问题松弛为一个连续变量的优化问题, 用连续设计变量的优化模型代替原来离散变量的设计模型. 具体到本文的钢结构构件拓扑优化中, 就是通过引入连续变量 $\eta(x)$ 以及惩罚因子 ρ , 把式 (1) 中的离散变量 $\chi(x)$ 变为连续变量 $\eta(x)$, 则式 (1) 所示的优化模型可转化为连续变量的优化模型:

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(x) &= \eta(x) E_{ijkl}^0, \\ 0 &< \eta(x) \leq 1 \end{aligned}$$

这样连续设计变量可以取 0 到 1 之间的中间密度值. 这种结构在现实中也是不存在的. 为了解决这一问题, 在此采用势阱函数 W (potential-well function), 来抑制这种结构的产生. 势阱函数 W 的表达式如下^[6]:

$$W(\rho) = \rho^2(1-\rho)^2$$

函数特性如图 1.

引入势阱函数, 把 $\eta(x)$ 看成某高斯积分点所表征的面积处的相对密度, 并 $\rho(x)$ 代替. 以无网格再生核质点法作为结构相应分析方法. 采用基于背景网格的高斯积分作为数值积分方法, 以每个高斯积分点上的相对密度作为设计变量, 优化问

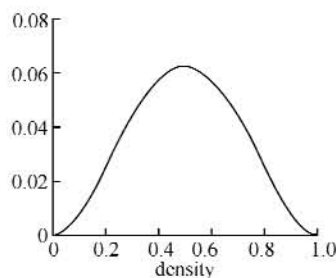


图 1 势阱函数特性, $0 \leq \rho \leq 1$ (单位: 无量纲)

Fig. 1 Characteristics of Potential-well Function, $0 \leq \rho \leq 1$

题的连续形式数学模型表达式为^[7]:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U(\rho)} L(\rho, u) &= l(u) + \alpha \int_{\Omega} W(\rho) dx \quad \alpha > 0 \\ \text{s.t. } l(u) &= \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ \mathbf{K}(\rho) \mathbf{u} &= \mathbf{F} \\ E_{ijkl}(x_i) &= \rho E_{ijkl}^0, 0 < \rho \leq 1, \\ \text{mass} &= \sum_{i=1}^{N_{gp}} s_i \rho_i \leq V, 0 < \rho_i \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

其中, 式 $\mathbf{K}(\rho) \mathbf{u} = \mathbf{F}$ 是由无网格再生核质点法形状函数离散得到的控制方程.

2 优化方法和灵敏度分析

对于钢结构构件拓扑优化问题, 一般有两类优化算法用来求解带约束的非线性优化问题. 一类常见的优化算法是优化准则法 (OC); 另一类是基于数学规划的优化算法. 优化准则法主要基于一种启发式的显式的变量更新方案来更新设计变量, 它对大量设计变量的和少量约束的问题具有较高的优化效率, 但对于多约束问题, 由于依次引入相应约束的 Lagrange 乘子, 每个 Lagrange 乘子要采用不同的准则, 此时优化的求解效率将大大降低. OC 方法是不像数学规划类的方法那样直接优化目标函数, 而是基于所谓的 KKT 条件构造一系列优化结构应满足的准则. 基于数学规划的优化算法, 主要有序列线性规划 (SLP), 序列二次规划 (SQP), 序列凸规划 (SCP), 移动渐近线法 (MMA) 等^[8]. 本文采用 SQP 来处理优化问题. 基于梯度优化设计方法的关键在于求解响应值在某点处的梯度方向, 即在该点处的灵敏度.

可以从无网格法得到离散的无网格再生核质点法控制方程^[8]:

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{d} = \bar{\mathbf{F}} \quad (3)$$

这里 \mathbf{d} 是节点未知向量, 而不是位移向量, 其中 $\bar{\mathbf{K}}$ 和 $\bar{\mathbf{F}}$ 由下式定义:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \mathbf{K}_a \\ \bar{\mathbf{F}} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_a \end{aligned}$$

其中, K, K_a, F, F_a 可由式 $K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega$,

$$K_{ij}^a = \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi_i^T S \Phi_j d\Gamma,$$

$F_i = \int_{\Omega} \Phi_i^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi_i^T \bar{t} d\Gamma$ 和 $F_i^a = \alpha \int_{\Gamma_u} \Phi_i^T S u d\Gamma$ 来表示.

当作如下定义:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \bar{K} T \\ u &= \Phi d \\ T &= \Phi^{-1} \end{aligned}$$

式(3)可以写成:

$$\tilde{K} u = \bar{F} \quad (4)$$

其中, Φ 是形状函数矩阵.

可以采用直接微分法来求得位移的灵敏度, 式(4)两边对设计变量 ρ_i 求导, 可得:

$$\tilde{K} \frac{\partial u}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \rho_i} u = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho_i}$$

这里, \bar{F} 是一个独立变量, 即 $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho_i} = 0$. 所以可以得到位移的灵敏度:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_i} = -(\tilde{K})^{-1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \rho_i} u$$

其中, 矩阵 \tilde{K} 的灵敏度可以由(5)式得到:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \rho_i} = \frac{\partial (K + K_a) T}{\partial \rho_i} = p \rho^{p-1} K_a T \quad (5)$$

这里 K_a 是一个单元刚度矩阵.

从式(2)可以得到目标函数中的柔度表达式 $l(u) = F^T u$, 我们可以得到柔度的灵敏度:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \rho_i} &= \bar{F}^T \frac{\partial u}{\partial \rho_i} = -\bar{F}^T (\tilde{K})^{-1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \rho_i} u \\ &= -p \rho^{p-1} \bar{F}^T \Phi K^{-1} K_a d \end{aligned}$$

以及目标函数中的势阱函数的灵敏度:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_i} = \alpha \rho_i (1 - \rho_i) (1 - 2\rho_i)$$

约束函数的灵敏度:

$$\frac{\partial \text{mass}}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{N_{gp}} s_i \rho_i}{\partial \rho_i} = s_i$$

这里, s_i 是第 i 个高斯积分点所表征区域的面积.

3 数值算例

3.1 算例一

如图2为初始设计区域, 一个左端固定的悬臂钢梁, 长20 m, 宽10 m, 弹性模量 $E_0 = 206\,000$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 集中荷载 $F = 1\,000$ N. 体积约束为

30%. 如图3所示, 用861个点来离散初始设计区域进行RKPM分析. 采用 40×20 个背景网格来进行数值积分, 每个积分网格里有4个积分点, 共有3200个设计变量.

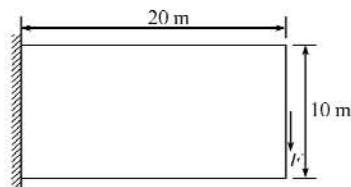


图2 初始设计区域

Fig. 2 The initial design region

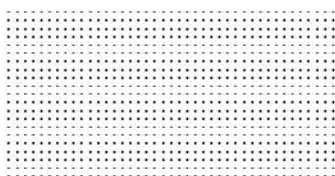


图3 初始设计节点分布

Fig. 3 The initial node distribution

经过40步迭代优化收敛, 所得最优钢结构构件拓扑形式如图4所示, 这里由高斯积分点来表征材料的分布. 图5为目标函数的收敛曲线.



图4 最优结构拓扑形式

Fig. 4 Topological structure of the optimal form compliance history

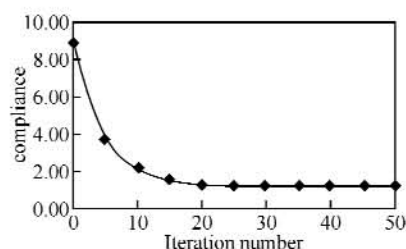


图5 目标函数收敛曲线(单位: 无量纲)

Fig. 5 Convergence curve of the objective function

3.2 算例二

初始设计区域如图6所示, 一个两端铰支的简支钢梁, 长是20 m, 宽是10 m, 弹性模量 $E_0 = 20\,600$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 集中荷载 $F = 1\,000$ N. 体积约束为30%. 我们还是用861个点来离散初始设计区域. 采用 40×20 个背景网格来进行数值积分, 每个积分网格里有4个积分点, 共有3200个设计变量.

经过 35 步迭代后,得到如图 7 所示的最优结构拓扑形式,图 8 为目标函数的收敛曲线。

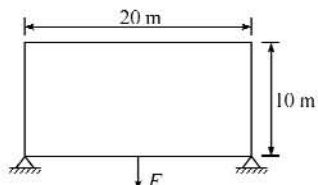


图 6 初始设计区域

Fig. 6 The initial design region

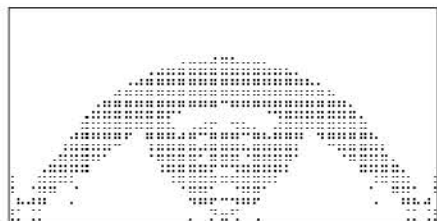


图 7 最优结构拓扑形式

Fig. 7 Topological structure of the optimal form

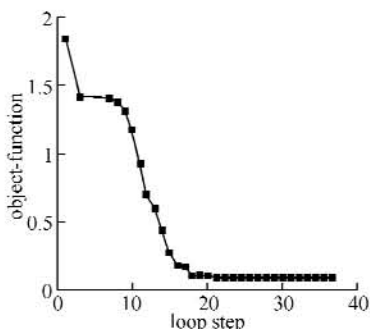


图 8 目标函数收敛曲线(单位:无量纲)

Fig. 8 Convergence curve of the objective function

通过对上述两个算例的对比分析,目标函数都具有较快的收敛性,收敛速度的优势对进一步进行复杂结构的优化比较重要^[8]。基于无网格的

方法避免了网格的不断生成以及畸变等引起的构件优化过程中出错以致于无法进行。

4 结 语

本文成功地将无网格方法应用于基于势阱函数模型的拓扑优化问题,并在无网格法框架下进行了设计灵敏度分析,并通过算例对钢结构构件的模拟分析计算,证实了将无网格方法应用于钢结构构件的拓扑优化领域的可行性。

参考文献:

- [1] 宫海,李国强,张之勇.高层建筑钢构件综合优化算法研究[J].建筑结构,2007,(10):26-28.
- [2] 邹伟,周进雄,张智谦,等.二维连续体结构拓扑优化的再生核质点方法[A].中国力学学会学术大会2005 论文摘要集(下),2005:196-197.
- [3] 周进雄,李梅娥,张红艳,等.再生核质点法研究进展[J].力学进展,2002,32:535-544.
- [4] 张化振,刘广立,胡长明,等.某钢烟囱塔架结构的优化设计[J].钢结构,2008,(7):28-30.
- [5] 蔡新,郭兴文,张旭明.工程结构优化设计[M].北京:中国水利水电出版社,2003.
- [6] Grindeanu I, Chang K H, Chen J S. Design sensitivity analysis of hyperelastic structures using a meshless method. AIAA Journal, 1998, 36: 618-627.
- [7] 王学明,周进雄,张陵. RKPM 形状函数的矩式显式表述及快速计算[J].计算力学学报,2004,(12):54-56.
- [8] 王学明,周进雄,张智谦,等.形状设计灵敏度分析的改进的再生核质点法[J].计算力学学报,2005,(4):40-44.

Analysis of steel structure optimization based on meshless method

ZHAO Qun^{1,2}

(1. Guangdong Elite Architectural Co., Ltd, Foshan 528312, China;

2. Department of Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Based on meshless method for the steel structure topology optimization and virtual density as a design variable, the paper introduced potential well function and the optimization objective function of flexibility. At the same time, the relationship between the density of virtual materials and elastic modulus is explicitly expressed. The introduction of potential-well function makes that the middle density to 0 / 1. Based on meshless method, the sensitivity is analyzed, and we use the sequential quadratic programming (SQP) as an optimized algorithm to verify the feasibility of the topology optimization simulation of steel structure.

Key words: meshless methods; potential-well function; steel structure topology optimization; sensitivity analysis

本文编辑:萧 宁