

# 载流长直螺线管和螺绕环的磁场对称性分析

余仕成,周金华

(武汉工程大学理学院,湖北 武汉 430074)

**摘要:**根据电流的对称性,选取对称的两个圆电流,并在两个圆电流上选取对称的两个电流元,利用毕奥-萨伐尔定律和磁场叠加原理证明了载流长直螺线管的磁场方向平行于管轴以及载流螺绕环的磁场方向沿过场点的同轴圆的切线方向.

**关键词:**长直螺线管;螺绕环;磁场方向;对称性

中图分类号:O433

文献标识码:A

doi:10.3969/j.issn.1674-2869.2010.05.029

## 0 引言

在很多应用问题中会涉及到磁场分布<sup>[1]</sup>,而均匀密绕的载流长直螺线管和螺绕环的磁场分布既是技术应用中常见的磁场分布,又是大学物理中磁场理论的典型问题.在一般大学物理教材<sup>[2-5]</sup>中,都是根据磁场分布的对称性利用磁场的安培环路定理来求解,而在有关对称性的讨论中,其方向对称性都没有给出严格的证明,本文利用毕奥-萨伐尔定律和磁场叠加原理对载流长直螺线管的磁场方向对称性和载流螺绕环的磁场方向对称性进行了分析与证明.

## 1 载流长直螺线管的磁场方向

长直螺线管是一个理想模型,其长度当作无限长,通电导线是均匀密绕的.在理论分析时可看作是有很多的圆电流所构成的.因为电流具有轴对称,所以,磁场方向也具有对称性:螺线管内任意点的磁场方向都与管轴平行.

如图1所示,任取一点 $P$ ,到轴线的距离为 $r$ .建立直角坐标系, $z$ 轴沿螺线管的中心轴线, $y$ 轴过

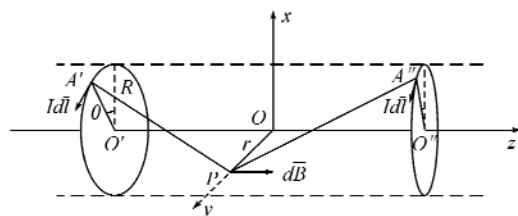


图1 载流长直螺线管的磁场方向

Fig.1 The magnetic field direction of the carrying current long straight solenoid

$P$ 点,则 $P$ 点坐标为 $P(0, r, 0)$ .取两个圆电流 $O'$ 和 $O''$ ,它们到 $O$ 点的距离都为 $z$ ;在圆电流 $O'$ 和 $O''$ 的对应位置 $A'$ 和 $A''$ 处各取一相同的电流元 $Idl$ , $I$ 是圆电流的强度. $A'$ 和 $A''$ 的坐标可表示为 $A'(R\cos\theta, R\sin\theta, -z)$ 和 $A''(R\cos\theta, R\sin\theta, z)$ ,而 $Idl = Idl(-\sin\theta i + \cos\theta j)$ .根据毕奥-萨伐尔定律, $A'$ 处的电流元 $Idl$ 在 $P$ 点产生的磁感应强度为

$$dB_1 = \frac{\mu_0 Idl \times r'}{4\pi r'^3} \quad (1)$$

其中 $\mu_0$ 为真空磁导率, $r' = -R\cos\theta i + (r - R\sin\theta)j + zk$ 为由 $A'$ 指向 $P$ 的矢量, $r'$ 为 $A'$ 点到 $P$ 点的距离.而 $A''$ 处的电流元 $Idl$ 在 $P$ 点产生的磁感应强度为

$$dB_2 = \frac{\mu_0 Idl \times r''}{4\pi r''^3} \quad (2)$$

其中 $r'' = -R\cos\theta i + (r - R\sin\theta)j - zk$ 为由 $A''$ 指向 $P$ 的矢量, $r''$ 为 $A''$ 点到 $P$ 点的距离,且 $r'' = r'$ .由磁场的叠加原理,可得两电流元在 $P$ 处产生的磁感应强度为

$$dB = dB_1 + dB_2 = \frac{\mu_0 Idl \times (r' + r'')}{4\pi r'^3} \quad (3)$$

$$\text{而 } r' + r'' = -2R\cos\theta i + 2(r - R\sin\theta)j$$

$$Idl \times (r' + r'') =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -Idl\sin\theta & Idl\cos\theta & 0 \\ -2R\cos\theta & 2(r - R\sin\theta) & 0 \end{vmatrix} = 2Idl(R - r\sin\theta)k$$

代入(3)式得

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \times (r' + r'')}{4\pi r'^3} = \frac{\mu_0 Idl}{2\pi r'^3} (R - r\sin\theta)k \quad (4)$$

即 $dB$ 的方向沿螺线管的轴线方向.对于长直

螺线管来说,圆电流是成对的,电流元也是成对的,所以  $P$  处的磁场方向必平行于螺线管的轴线方向。

## 2 载流螺绕环的磁场方向

均匀密绕的螺绕环的结构如图 2 所示,也可看作是有很多的圆电流所构成的。设螺绕环的中心轴线圆的半径为  $R$ ,环管截面圆的半径(即圆电流的半径)为  $r$ 。如图 3 所示,建立直角坐标系,坐标原点  $O$  在螺绕环的几何对称中心点, $z$  轴竖直向上;任取一  $P$  点,使  $xoz$  平面通过  $P$  点( $P$  点即可以在环管内部,也可以在环管外部),设  $P$  点坐标为  $P(x, 0, z)$ 。任取两个关于  $xoz$  平面对称的圆电流  $O_1$  和  $O_2$ ,其圆平面与  $xoz$  平面的夹角都为  $\theta$ ;作  $P$  点与圆  $O_1$  和  $O_2$  的垂线,垂线与  $O_1$  和  $O_2$  圆平面的交点分别为  $P_1$  和  $P_2$ ,设直线  $O_1P_1$  与直线  $OO_1$  的夹角为  $\alpha$ ,则直线  $O_2P_2$  与直线  $OO_2$  的夹角也为  $\alpha$ ;在圆电流  $O_1$ 、 $O_2$  的对应位置  $A_1$ 、 $A_2$  分别取大小相等的电流元  $Idl_1$ 、 $Idl_2$ ,半径  $O_1A_1$  与  $O_1P_1$  的夹角为  $\varphi$ ,半径  $O_2A_2$  与  $O_2P_2$  的夹角也为  $\varphi$ 。 $A_1$ 、 $A_2$  的位置坐标分别为  $A_1(x_1, -y_1, z_1)$ 、 $A_2(x_1, y_1, z_1)$ ,其中  $x_1 = (R + r\cos(\alpha + \varphi))\cos\theta$ 、 $y_1 = (R + r\cos(\alpha + \varphi))\sin\theta$ 、 $z_1 = r\sin(\alpha + \varphi)$ ;电流元  $Idl_1$ 、 $Idl_2$  分别表示为  $Idl_1 = a_1i + b_1j + c_1k$ 、 $Idl_2 = a_1i - b_1j + c_1k$ ,其中  $a_1 = -Idl\sin(\alpha + \varphi) \times \cos\theta$ 、 $b_1 = -Idl\sin(\alpha + \varphi)\sin\theta$ 、 $c_1 = Idl\cos(\alpha + \varphi)$ 。根据毕奥-萨伐尔定律,电流元  $Idl_1$  在  $P$  点产生的磁感应强度为



图 2 螺绕环

Fig. 2 Endless solenoid

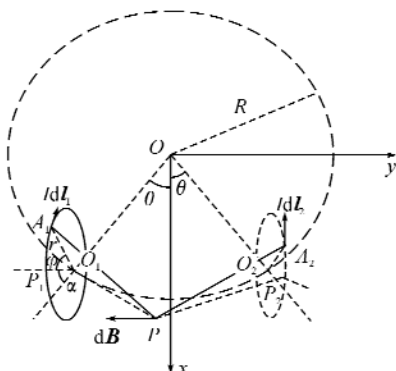


图 3 载流螺绕环的磁场方向

Fig. 3 The magnetic field direction of the carrying current endless solenoid

$$dB_1 = \frac{\mu_0 Idl_1 \times r_1}{4\pi r_1^3} \quad (5)$$

其中  $r_1 = a_2i + b_2j + c_2k$  为由  $A_1$  指向  $P$  的矢量,  $r_1$  为  $A_1$  点到  $P$  点的距离,而  $a_2 = x - x_1$ 、 $b_2 = y_1$ 、 $c_2 = z - z_1$ 。而电流元  $Idl_2$  在  $P$  点产生的磁感应强度为

$$dB_2 = \frac{\mu_0 Idl_2 \times r_2}{4\pi r_2^3} \quad (6)$$

其中  $r_2 = a_2i - b_2j + c_2k$  为由  $A_2$  指向  $P$  的矢量,  $r_2$  为  $A_2$  点到  $P$  点的距离,且  $r_2 = r_1$ 。由磁场的叠加原理,可得两电流元  $Idl_1$  和  $Idl_2$  在  $P$  点产生的磁感应强度为

$$dB = dB_1 + dB_2 = \frac{\mu_0 I (dl_1 \times r_1 + dl_2 \times r_2)}{4\pi r_1^3} \quad (7)$$

而

$$Idl_1 \times r_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)i -$$

$$(a_1c_2 - a_2c_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

$$Idl_2 \times r_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & -b_1 & c_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -(b_1c_2 - b_2c_1)i -$$

$$(a_1c_2 - a_2c_1)j - (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

$$\text{则 } Idl_1 \times r_1 + Idl_2 \times r_2 = -2(a_1c_2 - a_2c_1)j$$

将上式代入(7)式得

$$dB = \frac{\mu_0 I (dl_1 \times r_1 + dl_2 \times r_2)}{4\pi r_1^3} = -\frac{\mu_0}{2\pi r_1^3} (a_1c_2 - a_2c_1)j \quad (8)$$

由于螺绕环结构的对称性,上述电流元和圆电流都是成对出现的,所以  $P$  的磁场方向沿着通过  $P$  点的圆(圆心在  $z$  轴上且圆平面与轴垂直)的切线方向。

参考文献:

- [1] 余仕成. 一个电磁感应演示实验的分析与计算[J]. 武汉工程大学学报, 2007, 29(2): 94-96.
- [2] 吴锡琬. 大学物理教程(第二册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999: 258-259.
- [3] 黄祝明, 吴锋. 大学物理学(上册)[M]. 北京: 化学工业出版社, 2008: 214-214.
- [4] 程守洵, 江之永. 普通物理学(第二册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 231-232.
- [5] 张三慧. 电磁学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 261-262.

(下转第 110 页)

$E\xi_1(1)=1, E\xi_1(2)=0.992, E\xi_1(3)=0.958,$   
 $E\xi_1(4)=0.924, E\xi_1(5)=0.72, E\xi_1(6)=0.426;$   
 $E\xi_2(1)=1, E\xi_2(2)=0.997, E\xi_2(3)=0.852,$   
 $E\xi_2(4)=0.823, E\xi_2(5)=0.631, E\xi_2(6)=0.344;$   
 $E\xi_3(1)=1, E\xi_3(2)=0.989, E\xi_3(3)=0.827,$   
 $E\xi_3(4)=0.779, E\xi_3(5)=0.593, E\xi_3(6)=0.333.$   
 $x_i(i=1,2,3)$  对  $x_0$  的指数型关联度分别为

$$Er_1=0.837, Er_2=0.774,$$

$$Er_3=0.754, Er_1 > Er_2 > Er_3.$$

## 4 结 语

指数型关联分析模型对动态过程发展态势进行量化比较分析时克服了一般关联分析模型的不足,考虑了数据的波动对关联度的影响,提高了模型的分辨率,因此其较一般关联分析模型更具有合理性.

## 参考文献:

- [1] Deng Ju-long. The Control Problems of Grey Systems [J]. Systems & Control Letters, 1982(5):288-294.
- [2] 邓聚龙. 灰色系统(社会、经济)[M]. 北京:国防工业出版社, 1985.
- [3] 邓聚龙. 灰色系统与农业区划[J]. 农业资源与区划, 1984(4):1-12.
- [4] 邓聚龙. 棉蚜虫生物防治灰色模型, 大自然探索, 1984(3):44-49.
- [5] 杨建华, 高永东. 灰关联度在边坡稳定性分析中的应用[J]. 武汉化工学院学报, 1999, 21(2):49-51.
- [6] 邓聚龙. 灰色系统基本方法[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1987:17-28.
- [7] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2002:135-150.

# Index-based grey relational analysis model

*YANG Jian-hua*

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Hubei Province Key Laboratory  
of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** This paper presents the index-based grey relational coefficient and the index-based grey relational degree by improving the grey relational coefficient and the grey relational degree in the grey relational analysis, and the characteristics are discussed also. Moreover, the index-based grey relational analysis model, which is more rational and scientific, is established.

**Key words:** grey relational coefficient; grey relational degree; index-based grey relational coefficient; index-based grey relational degree

本文编辑:龚晓宁

☆

(上接第 107 页)

# Symmetry analysis on the magnetic fields of carrying current long straight solenoid and endless solenoid

*YU Shi-cheng, ZHOU Jin-hua*

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** Based on the symmetry of currents, the paper selects the two symmetrical circular currents, and selects a current element in each circular current, the results that the magnetic field direction of the carrying current long straight solenoid is parallel to the solenoid axis. The magnetic field direction of the carrying current endless solenoid over the field point along the tangent direction of the coaxial circle are proved by using the Biot-Savart law and superposition principle of magnetic field.

---

**Key words:** long straight solenoid; endless solenoid; magnetic field direction; symmetry

本文编辑: 龚晓宁